

משתנה מקרי רציף

הקדמה

עד עתה דנו במשתנה מקרי בדיד. כלומר במשתנה מקרי שיכול לקבל לכל היותר מספר בן-מנייה של ערכים אפשריים. משתנה מקרי רציף הוא משתנה מקרי שאיננו בדיד, כלומר קבוצת הערכים האפשריים אינה בת-מנייה. (במילים אחרות, המשתנה המקרי מקבל רצף של ערכים, כלומר יכול לקבל את כל הערכים האפשריים ברווח (אינטרוול) מסוים או באיחוד של רווחים). דוגמאות למשתנה מקרי רציף: משך שיחת טלפון, משך חיים של רכיב אלקטרוני, משקל של פריט וכדומה. לענייננו, משתנה מקרי רציף יוגדר כמשתנה המקבל ערכים בקטע כלשהו (סופי או אינסופי), כך ש $P(X = x) = 0$ לכל x , וקיימת פונקציית f שבעזרתה נחשב הסתברויות שמתייחסות ל- X .

נגדיר באופן פורמלי מהו משתנה מקרי רציף באמצעות המושג פונקציית צפיפות.

הגדרה: פונקציית צפיפות ומשתנה מקרי רציף

אם קיימת פונקציה $f(x)$ אי-שלילית (כלומר $f(x) \geq 0$ לכל x ממשי) המקיימת:

$$P(a \leq X \leq b) = \text{שטח מתחת ל } f \text{ בין } a \text{ ל } b \text{ (כלומר חישוב אינטגרל)},$$

אז X נקרא **משתנה מקרי רציף** ו- f נקראת **פונקציית הצפיפות של X** .

הערות:

1. כמובן שהשטח הכולל מתחת ל f חייב להיות 1.
2. על כל השאלות שקשורות ל X אפשר לענות בעזרת פונקציית הצפיפות, ע"י חישוב אינטגרלים.
3. נשים לב ש: $P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$ כלומר בעבור משתנה מקרי רציף, ההסתברות שהוא יקבל ערך מסוים כלשהי היא אפס.
4. מהערה 3 נובע שבעבור משתנה מקרי רציף $P(X < t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx$.
5. משמעות פונקציית הצפיפות $f(x)$: מידת הריכוז של ההסתברות סביב הנקודה x . (ל dx קטן, $f(x)dx \approx P(x \leq X \leq x + dx)$)

הגדרה: פונקצית ההתפלגות מצטברת

פונקצית ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי X מסומנת ע"י $F(t)$ ומוגדרת באופן הבא:

$$F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx$$

תכונות של פונקצית ההתפלגות המצטברת:

1. F היא פונקציה לא יורדת, כלומר אם $a < b$ אז $F(a) \leq F(b)$.

$$2. \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$$

$$3. \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$$

4. F רציפה מימין, כלומר לכל t ולכל סדרה b_n המתכנסת ל- b מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} F(b_n) = F(b)$.

שימוש בהתפלגות מצטברת כדי לחשב הסתברויות:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) \text{ לכל } a < b.$$

תוחלת של משתנה מקרי רציף

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

שונות של משתנה מקרי רציף

$$Var(X) = E([X - \mu]^2) = E(X^2) - \mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$$

התפלגויות רציפות מיוחדות

התפלגות אחידה

משתנה מקרי רציף מפולג אחידה בין a ל- b , בעבור $a < b$, אם פונקצית הצפיפות של X היא:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

סימון: $X \sim U(a, b)$

תוחלת ושונות של התפלגות אחידה:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

פונקצית ההתפלגות המצטברת:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 1 & t > b \end{cases}$$

התפלגות מעריכית (אקספוננציאלית)

משתנה מקרי רציף מפולג מעריכית עם פרמטר λ , בעבור $\lambda > 0$, אם פונקצית הצפיפות של X היא:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

סימון: $X \sim \exp(\lambda)$

תוחלת ושונות של התפלגות מעריכית:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

פונקצית ההתפלגות המצטברת:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

תכונת חוסר הזיכרון של משתנה מקרי מעריכי:

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t) \text{ בעבור } s, t > 0.$$

הקשר בין התפלגות מעריכית להתפלגות פואסון:

אם נתון זרם אירועים פואסוני עם פרמטר λ , ונגדיר משתנה מקרי: $X =$ משך הזמן שחולף עד האירוע הראשון, אז ל- X יש התפלגות מעריכית עם פרמטר λ . כמו כן, אם נגדיר $Y =$ משך הזמן שחולף בין שני אירועים עוקבים, אז Y מתפלג מעריכית עם פרמטר λ .

התפלגות נורמלית סטנדרטית

Z נקרא משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי אם פונקצית הצפיפות של Z ניתנת ע"י:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad -\infty < z < \infty$$

צורת ההתפלגות: פעמונית, סימטרית סביב אפס.

סימון: $Z \sim N(0,1)$

תוחלת ושונות של התפלגות נורמלית סטנדרטית:

$$E(Z) = 0 \quad \text{Var}(Z) = 1$$

פונקצית ההתפלגות המצטברת:

$$\phi(t) = F(t) = P(Z \leq t)$$

ניתן למצוא את ערכי $\phi(t)$ בטבלת התפלגות נורמלית סטנדרטית, וכן באקסל למשל.

התפלגות נורמלית (כלשהי)

משתנה מקרי X נקרא משתנה מקרי נורמלי עם פרמטרים μ ו σ^2 אם $\frac{X - \mu}{\sigma}$ הוא משתנה נורמלי סטנדרטי.

סימון: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

פונקצית הצפיפות של משתנה נורמלי:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

ההתפלגות הנורמלית היא התפלגות סימטרית סביב μ , ונקודות הפיתול שלה הן $\mu \pm \sigma$.

$$E(X) = \mu \quad \text{Var}(X) = \sigma^2$$

פונקצית ההתפלגות המצטברת:

$$F(t) = \phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)$$

חישוב הסתברויות של משתנה נורמלי נעשה בעזרת מעבר להתפלגות נורמלית סטנדרטית (תקנון), ושימוש בלוח ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית.

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

הערה :

כל קומבינציה לינארית של משתנים נורמליים X ו- Y מהצורה: $aX + bY + c$ (בתנאי ש $a \cdot b \neq 0$) מתפלגת גם היא נורמלית (עם הפרמטרים המתאימים).

קירוב נורמלי למשתנה בינומי – משפט דה-מואבר לפלאס

יהי X משתנה הסופר את מספר ההצלחות בסדרה של n חזרות בלתי תלויות על ניסוי, כאשר בכל ניסוי ההסתברות להצלחה היא p . אזי, כאשר n גדל, ההתפלגות של X הולכת ומתקרבת (שואפת) להתפלגות נורמלית עם תוחלת np ושונות $np(1-p)$.

במלים אחרות, המשתנה $\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ שואף להתפלגות נורמלית סטנדרטית.

בכתיבה מתמטית :

$$P\left(a \leq \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) \rightarrow \Phi(b) - \Phi(a) \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

זהו מקרה פרטי של משפט הגבול המרכזי שיובא בהמשך.